

**EXAMEN**

- P1.** a) (3,0 pts.) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, tal que ella forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de la menor área posible. Calcule el área mínima (considere $x, y > 0$).
- b) (3,0 pts.) Sean $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, tal que g tiene signo constante en $[0, \infty)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que para todo $a, b \in (0, \infty)$ tales que $0 < a < b$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = 0.$$

- P2.** a) Sea la función $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g'(x) > 0$, $\forall t \geq 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = M \in \mathbb{R}$, fijo. Considere la parametrización de la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$r(t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)), 1).$$

- i) (3,0 pts.) Encuentre el largo total de Γ y los vectores $T(t), N(t), B(t)$.
- ii) (1,0 pto.) Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$ de Γ para todo $t \in [1, \infty)$.
- b) (2,0 pts.) Considere la región R encerrada entre el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}}$, sus asíntotas verticales y el eje OX . Determine si el área de R y los volúmenes engendrados al rotar R en torno al eje OX y al eje OY , son finitos.

- P3.** a) i) (1,0 pto.) Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n}$ para distintos valores de p y q con $p > q > 0$.
- ii) (1,0 pto.) Estudie la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$.
- b) (2,0 pts.) Considere la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Determine el radio e intervalo de convergencia de la serie y demuestre que $\int_0^1 f(x) dx = f(1) - \frac{1}{2}$.
- b) (2,0 pts.) Considere la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$. Determine el radio r e intervalo de convergencia I (analice los extremos) y demuestre que la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$ satisface la ecuación $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Pueden ser útiles las siguientes fórmulas:

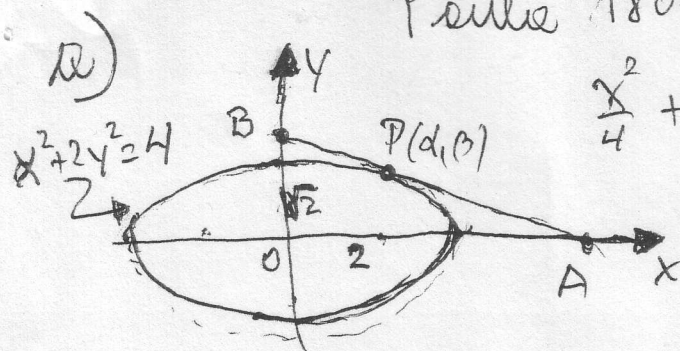
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}; \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx; \quad V = 2\pi \int_a^b xy dx; \quad S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Justifique cada uno de sus pasos

Tiempo: 3:00

Examen Cálculo Dif. e Integrales / (2013-2)

Parte Problema 1



$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ Sea $P(\alpha, \beta)$ el punto de tangencia. La ecuación de la recta tangente en $P(\alpha, \beta)$ es
 $y - \beta = m(x - \alpha)$ donde $m = y'(\alpha, \beta)$

derivando implícitamente $x^2 + 2y^2 = 4$ queda $2x + 4yy' = 0$

de donde $m = -\frac{x}{2y}$ y $m(\alpha, \beta) = -\frac{\alpha}{2\beta} \Rightarrow$ tgl es: $y - \beta = -\frac{\alpha}{2\beta}(x - \alpha)$

Intersectando en el eje y , en $x=0$ resulta $y_B = \beta + \frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{2\beta^2 + \alpha^2}{2\beta}$
 y como $P(\alpha, \beta) \in \text{Elipse}$, $\alpha^2 + 2\beta^2 = 4 \Rightarrow y_B = \frac{4}{2\beta} = \frac{2}{\beta}$
 Análogamente intersectando en el eje x , en $y=0$, queda $x_A = \alpha + \frac{2\beta^2}{\alpha}$
 $\Rightarrow x_A = \frac{\alpha^2 + 2\beta^2}{\alpha} = \frac{4}{\alpha}$

Segue que Area $\Delta OAB = A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \left(\frac{1}{2} x_A \cdot y_B \right)$
 Así $A(\alpha, \beta) = \frac{4}{\alpha\beta}$ pero $\alpha = \sqrt{4 - 2\beta^2}$

10) $\Rightarrow A(\beta) = \frac{4}{\beta \sqrt{4 - 2\beta^2}}$ en $0 < \beta < \sqrt{2}$

Derivando: $A'(\beta) = -4 \frac{\sqrt{4 - 2\beta^2} + \beta \frac{-2\beta}{\sqrt{4 - 2\beta^2}}}{\beta^2 (4 - 2\beta^2)} = -4 \frac{(4 - 2\beta^2) - 2\beta^2}{\beta^2 (4 - 2\beta^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow A'(\beta) = -16 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 (4 - 2\beta^2)^{3/2}}$ y $A'(\beta) = 0$ si $\beta = 1$

Además, $A'(\beta) < 0$ si $\beta \in (0, 1)$ y $A'(\beta) > 0$ si $\beta > 1$, entonces
 10) $\beta = 1$ es punto de mínimos de $A(\beta)$ y $\alpha = \sqrt{2}$.

Segue que la tangente en $P(\alpha, \beta)$ es $y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2})$

05) y Area mínima $A_{\min} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 1} = 2\sqrt{2}$

b) $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, g de signo constante y $f(0) = 0$
 Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = 0 \quad 0 < a < b$

En efecto, como f, g son continuas en $[0, \infty)$ y g es de signo constante en $[0, \infty)$, se puede aplicar el TEO del Valor Medio Generalizado para integrales, es decir

(1.0) $\exists \xi(a, b) \in [0, \infty)$ tal que $\int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = f\left(\frac{\xi}{n}\right) \int_a^b g(x) dx$
 Además g es continua en $[a, b] \subseteq [0, \infty)$ y por lo tanto integrable en $\int_a^b g(x) dx$ acotada.

(6.5) Por otro lado $\frac{\xi}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y f continua, entonces
 $f\left(\frac{\xi}{n}\right) \rightarrow f(0) = 0$ por hipótesis.

(1.5) Sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\xi}{n}\right) \int_a^b g(x) dx = 0$

Ponente Problems 2

a) $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g'(t) > 0$, $\forall t \geq 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = e \in \mathbb{R}$, fijo

$$\Gamma: \mathbf{r}(t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)), 1)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-g'(t) \sin(g(t)), g'(t) \cos(g(t)), 0) \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(g'(t))^2} = |g'(t)|$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = g'(t) \quad (g'(t) > 0)$$

Sigue que $L(\Gamma) = \int_1^\infty \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_1^\infty g'(t) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u g'(t) dt$
impropia

1.0 $\Rightarrow L(\Gamma) = \lim_{u \rightarrow \infty} g(t) \Big|_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} (g(u) - g(1)) = M - g(1)$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{g'(t)} (-g'(t) \sin(g(t)), g'(t) \cos(g(t)), 0) = (-\sin(g(t)), \cos(g(t)), 0)$$

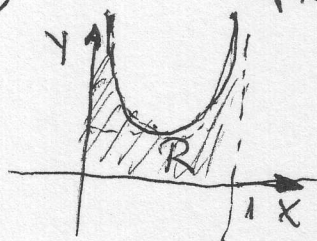
$$\mathbf{T}' = (-g'(t) \cos(g(t)), -g'(t) \sin(g(t)), 0) \wedge \|\mathbf{T}'\| = \sqrt{(g'(t))^2} = |g'(t)| = g'(t) > 0$$

Así, $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} = (-\cos(g(t)), -\sin(g(t)), 0)$

2.0 $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\sin g & \cos g & 0 \\ \cos g & -\sin g & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1)$

1.0 $K(t) = \frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{g'(t)}{g'(t)} = 1$ y $\mathbf{T}(t) = 0$ por ser Γ curva plana.

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1+x+x^2)}}$



El área de R se calcula mediante la integral impropia $A = \int_0^1 f(x) dx$

$$\Rightarrow A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1+x+x^2)}} dx \quad \text{lo que converge}$$

ya que su argumento se comporta como $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en torno a cero y como $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en torno a uno, es decir, en ambos casos se puede expresar (Cuociente) en integrales del tipo $\int_0^c \frac{dx}{x^a}$ y

(10) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ con $a = 1/2 < 1$

→ El volumen engendrado al rotar R en torno al eje OY se calcula mediante la integral impropia

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} dx \quad \text{lo que}$$

CONVERGE ya que es propia en cero y su argumento se

(15) comporta como $\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ en torno a uno

→ El volumen engendrado al rotar R en torno al eje OX se calcula mediante la integral impropia

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{x(1-x)(1+x+x^2)} dx \quad \text{lo}$$

que diverge ya que su argumento se comporta como

(15) $\frac{1}{x^1}$ en torno a cero y como $\frac{1}{(1-x)^1}$ en torno a 1

Ahora, $(0,1) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$

(10) $\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!} \Big|_0^1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

(65) $\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{2!} = f(1) - \frac{1}{2}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)n}{n(n-1)} \right| = 1 = \alpha$

Entonces $R = \frac{1}{\alpha} = 1$ e I provisional $(-1,1)$. Para los extremos, en $x=1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)$ diverge y en $x=-1 \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)$

(65) también diverge, entonces $I_c = (-1,1)$

Observar que $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$ sugiere doble derivación de

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

(68) $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d}{dx}(nx^{n-1}) = \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

(68) \Rightarrow Ambas derivadas válidas en $I = (-1,1)$. Entonces como, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$ se tiene.

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^n}{x^2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

(67) $\Rightarrow \frac{1}{x^2} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n}_{f(x)} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Punto Problema 3

a) i) Estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n}$ para distintos valores de p y q en $p > q > 0$

Aplicando el criterio de cociente $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{p^{n+1} - q^{n+1}}}{\frac{1}{p^n - q^n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n - q^n}{p^{n+1} - q^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{p - \left(\frac{q}{p}\right)^n q} = \frac{1}{p} \quad \left(\frac{q}{p} < 1\right)$$

La serie converge si $\frac{1}{p} < 1$, es decir si $p > 1$

(0.5) \rightarrow Diverge si $\frac{1}{p} \geq 1$, es decir si $p \leq 1$

En particular si $p = 1$, retornemos a la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}$ y $\frac{1}{1 - q^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$, entonces si $p = 1$ la

(0.5) serie diverge, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n} \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$

ii) Convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2} + n}$ que se puede comparar por cociente con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ en lo cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2} + n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2} + n} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ y como}$$

(1.0) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (armónica) diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$ diverge

b) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(0.5) Para el radio R , $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \alpha$

Entonces, como $\alpha = 0$, $R = \infty$ y \sum converge en \mathbb{R}